Exercices : Chapitre 4 : Matrices : Définitions et propriétés

Exercice n° 1
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice. Dans chacun des cas suivants :
- donner le format de A ;
- donner les valeurs des coefficients a_{13}, a_{22} et a_{32} s'ils existent.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$

Exercice n° 2
1. Écrire la matrice $A = (a_{ij})$ de format $(3,4)$ dont tous les coefficients sont nuls exceptés les coefficients suivants : $a_{11} = -2$, $a_{24} = 6$ et $a_{31} = 5$.
2. Écrire la matrice $B = (b_{ij})$ de format $(3,3)$ dont tous les coefficients sont nuls exceptés les coefficients suivants : $b_{13} = 2$, $b_{22} = 5$ et $b_{32} = -6$.
3. Écrire la matrice $C = (c_{ij})$ de format $(4,2)$ dont tous les coefficients sont nuls exceptés les coefficients suivants : $c_{31} = -5$, $c_{42} = 1$, $c_{41} = 7$ et $c_{12} = -9$.

Exercice n° 3
1. Écrire la matrice $A = (a_{ij})$ de format $(3,3)$ dont les coefficients sont définis par :
   Pour tout $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$, $a_{ij} = i + j$.
2. Écrire la matrice $B = (b_{ij})$ de format $(2,3)$ dont les coefficients sont définis par :
   Pour tout $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3$, $b_{ij} = 2^{i-j}$.
3. Écrire la matrice $C = (c_{ij})$ de format $(4,4)$ dont les coefficients sont définis par :
   Pour tout $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 4$, $\begin{cases} c_{ij} = |i-j| & \text{si } i \neq j \\ c_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice n° 4
On donne les matrices colonnes suivantes : $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer les matrices :

1. $D = 5A$
2. $E = -B$
3. $F = 2A + B$;
4. $G = C - A$;
5. $H = 2A - B - C$
6. $J = A + 2B - 3C$.

Exercice n° 5
On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer les matrices suivantes :

1. $C = -3A$;
2. $D = 5B$;
3. $E = A + B$;
4. $F = B - A$.

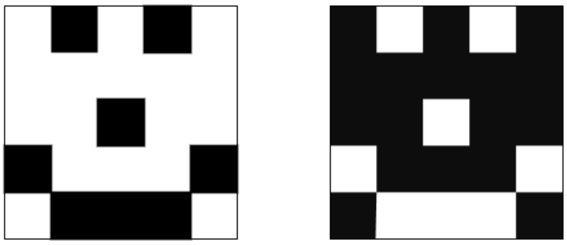
Exercice n° 6
On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.
Calculer les matrices suivantes :

1. $C = -A$;
2. $D = \dfrac{2}{3}\, B$;
3. $E = -2(A + B)$;
4. $F = 3B - 5A$.

Exercice n° 7
On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice M de format $(2, 2)$ telle que :

1. $2M + A = 5B$
2. $M + B = 3M - 2A$

Exercice n° 8
Les images suivantes sont constituées de 25 petits carrés (5×5) noirs ou blancs, que l'on appellera pixels.
L'image de droite est le négatif de celle de gauche.



On représente ces images par des matrices carrées de format $(5, 5)$ dont chaque coefficient vaut soit 0 (si le pixel correspondant est blanc), soit 1 (s'il est noir).

1. Donner les matrices A et A' associées à ces images.
2. Exprimer A en fonction de A' et de J, où J est la matrice de format $(5, 5)$ dont chaque coefficient vaut 1.

Exercice n° 9
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A ayant pour matrice de coordonnées $C_A = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\mathscr{P}$ est le plan d'équation $2x - 4y + z + 14,5 = 0$.
On note A' le point du plan $\mathscr{P}$ tel que la droite (AA') soit perpendiculaire à $\mathscr{P}$. On dit alors que A' est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$.

1. Considérons le vecteur $\overrightarrow{n}$ ayant pour matrice de coordonnées $C_{\overrightarrow{n}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

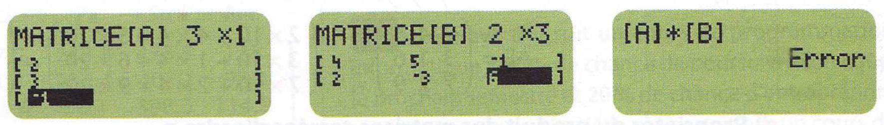
   Que représente $\overrightarrow{n}$ pour le plan $\mathscr{P}$?

2(a) Justifier qu'il existe un unique nombre t tel que : $C_A - C_{A'} = t\, C_{\overrightarrow{n}}$.

(b) Déterminer la valeur de t. En déduire la matrice $C_{A'}$.

Exercice n° 10

1. **Des produits impossibles**
   Antoine a voulu effectuer le produit matriciel $A \times B$. Voici les écrans qu'il a obtenus.
   Expliquer l'erreur qu'il a commise.



2. **Commutativité**
   Calculer $A \times B$ et $B \times A$ avec les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.
   Que constate-t-on ?
3. **Produit nul**
   Calculer $C \times D$ avec les matrices : $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. En quoi le résultat est-il surprenant ?

Exercice n° 11
Calculer les produits suivants.

1. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exercice n° 12
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Calculer le produit AB. Le produit BA a-t-il un sens ?

Exercice n° 13
Dans chacun des cas suivants, calculer le produit AB.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exercice n° 14
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Les produits AB et BA ont-t-ils un sens ?
Si oui, calculer ces produits. A-t-on $AB = BA$?

Exercice n° 15

Dans chacun des cas suivants, calculer le produit AB.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 6 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice n° 16

En décembre, le magasin VoiturPlus a vendu 20 autoradios à 45 euros et 30 baladeurs à 60 euros.
Le même mois, son concurrent Bagnol's a vendu 15 autoradios à 50 euros et 25 baladeurs à 50 euros.
On pose $A = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 45 & 50 \\ 60 & 50 \end{pmatrix}$.

1. Que représente le coefficient a_{ij} (repectivement b_{ij}) de la matrice A (respectivement B), où i et j sont d entiers compris entre 1 et 2 ?
2. En prenant $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer de deux manières différentes les produits ABC et ABD.
   Que représentent les matrices obtenues ?

Exercice n° 17

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit AA^T.
2. $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. Deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont définis par :

$$\vec{e_1} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{e_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}.$$

   Expliquer pourquoi on peut déduire de la question précédente que $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ forme un repère orthonorm du plan.

Exercice n° 18

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $AB = 0$
2. Calculer BA.
3. Déterminer une matrice C carrée d'ordre 2 non nulle telle que $BC = 0$.

Exercice n° 19

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $AB = I_2$, où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.
2. Calculer BA.

Exercice n° 20
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Calculer A^2. En déduire une expression de A^n, où n est un nombre entier naturel non nul.

Exercice n° 21

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $A + B$ puis $(A + B)^2$.
   (b) Calculer A^2, AB et B^2 puis $A^2 + 2AB + B^2$. Comparer avec le résultat de la question (a).
2. Reprendre le 1. avec $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 22
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On propose de deux façons de calculer la matrice A^2.

1. Déterminer la matrice A^2 en calculant chacun de ses coefficients.
2. Considérons la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $A = -2I + J$.
   (b) Exprimer J^2 en fonction de J.
   (c) En déduire l'expression de A^2 en fonction de I et de J. Retrouver alors le résultat de la question 1.

Exercice n° 23
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Exprimer A en fonction de I et N.
2. Calculer la matrice N^2 et en déduire, à partir de la question 1., une expression de A^2 en fonction de I et de N.
3. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel k,
   $A^k = (-3)^k I + k(-3)^{k-1} N$.
   Donner alors l'écriture de A^k.

Exercice n° 24
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

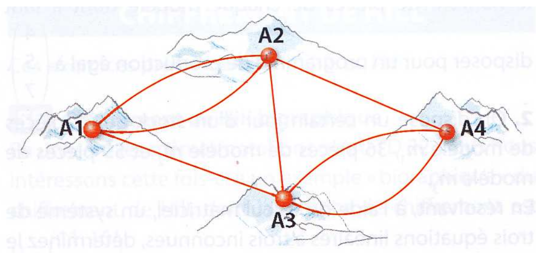
1. Calculer les matrices A^2 et N^2.
2. Exprimer A puis A^2 en fonction de I et de N.
3. Montrer, par récurrence, que pour tout entier $k \geq 1$, $A^k = 5^k I + k5^{k-1} N$.

Exercice n° 25
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les matrices A^2 et A^3.
2. Conjecturer, à partir des résultats obtenus, la valeur de A^n pour tout entier naturel n.
3. Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice n° 26
Les arêtes du graphe ci-dessous représentent des pistes de ski de fond, mesurant chacune 2 km. Les sommets de ce graphe sont les différents points d'accŝ à ce domaine skiable.

1. Écrire la matrice carrée M d'ordre 4 dont le coefficient m_{ij} représente le nombre de pistes reliant les accès A_i et A_j, pour i et j entiers entre 1 et 4.
2. Calculer M^2 et M^3 à l'aide de la calculatrice.
3. En déduire le nombre de circuits :
   (a) de 4 km reliant A_2 et A_3 ;
   (b) de 6 km reliant A_3 et lui-même ;
   (c) d'au plus 6 km reliant A_1 et A_4.



Exercice n° 27
Dans chaque cas, déterminer si A est inversible. Dans l'affirmative, déterminer sa matrice inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

Exercice n° 28
Dans chaque cas, utiliser la calculatrice pour déterminer l'inverse de la matrice A.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice n° 29
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A(A - 2I_2) = 8I_2$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice n° 30
A est la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Vérifier alors que $A(A - I_3) = (A - I_3)A = 2I_3$.
3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
4. Vérifier le résultat à la calculatrice.

Exercice n° 31
On considère la matrice carrée d'ordre 2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont le déterminant est nul : $ad - bc = 0$.

Prouvons, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que A n'a pas d'inverse.
Supposons que A admet une inverse A'.
On pose la matrice $B = \begin{pmatrix} -c & a \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer $B(AA')$ puis $(BA)A'$.
2. Que peut-on en déduire ?
3. En s'inspirant des questions précédentes, montrer, à l'aide de la matrice $C = \begin{pmatrix} d & -b \\ d & -b \end{pmatrix}$ que $a = b = c = d = 0$.
   En déduire que la supposition de l'énoncé est fausse et conclure.

Exercice n° 32
Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 puis N^3.
2. Développer et simplifier les expressions :
   $(I_3 - N)(I_3 + N + N^2)$ et $(I_3 + N + N^2)(I_3 - N)$.
3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice n° 33
Résoudre les systèmes suivants à l'aide des matrices.

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -6x + 7y = -3 \\ 3x + 14y = -1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = -1 \\ \sqrt{8}x + \sqrt{27}y = 13 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 6x + 9y = 6 \\ x + 3y = \dfrac{7}{6} \end{cases}$

Exercice n° 34
Écrire les systèmes ci-dessous sous la forme d'une équation matricielle $AX = B$ avec des matrices A, B et X que l'on précisera.
Résoudre ensuite ce système avec la calculatrice.

1. $\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + y - z = 4 \\ 4x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} a + 2b - c = 1 \\ a - b + c = -2 \\ 3a + 2b - 2c = 4 \end{cases}$

Exercice n° 35
Résoudre à l'aide du calcul matriciel les systèmes :

1. $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 7x + 8y + z = 1 \\ 8x + 2y + 3z = 3 \\ 9x + 8y + 7z = 7 \end{cases}$

Exercice n° 36
Les ventes d'un magasin de smartphones sont indiquées ci-dessous.

	Iphone	**Nexus One**	**Black Berry**
Octobre	14	7	9
Novembre	13	10	11
Décembre	27	18	15

	Montant total
Octobre	11 230
Novembre	12 280
Décembre	22 140

On note x (respectivement y, z) le prix en euros, d'un Iphone (respectivement Nexus One, Black Berry) dans ce magasin.
Écrire un système d'inconnues x, y et z qui relie ces tableaux. Résoudre ce système à l'aide du calcul matriciel.

Exercice n° 37
f est une fonction trinôme du second degré définie pour tout nombre x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres ionconnus. On connaît trois images : $f(-1) = -6$, $f(1) = 2$ et $f(2) = -9$.

1. Écrire sous forme matricielle le système de trois équations à trois inconnues a, b et c qui permet de déterminer la fonction f.
2. Vérifier que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.
3. Résoudre ce système et en déduire l'expression de la fonction f.

Exercice n° 38
On considère le système (S) $\begin{cases} (3-\lambda)x - 2y = -4 \\ 5x - (4+\lambda)y = 5 \end{cases}$ où λ est un nombre réel.

1(a) Démontrer que si λ vérifie $\lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0$ alors le système (S) admet un unique couple solution.

(b) Déterminer dans ce cas, à l'aide du calcul matriciel, le couple solution de (S) en fonction de λ.

2(a) Résoudre l'équation $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

(b) Résoudre le système (S) pour les valeurs de λ obtenues à la question précédente.

Exercice n° 39
On considère les matrices carrées d'ordre 3 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1(a) Déterminer deux nombres α et β tels que : $A = \alpha J + \beta I_3$.

(b) Exprimer J^2 en fonction de J.

(c) En déduire que $A^2 = -5J + 16I_3$.

2. À partir de la question précédente, prouver que : $A^2 + 5A = -4I_3$.
3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.