Correction ex 87 p 64 : ETUDE D'UNE FONCTION DE COUT TOTAL

L'entreprise chinoise Shishi produit du tissu en coton qu'elle conditionne en « roules » de 2 000 m de long et 1,5 m de large. Elle peut fabriquer au maximum 10 km en continu.

Le coût total de production, en euro, est donné en fonction de la longueur, en km, par la formule :

$$\boldsymbol{C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750 \text{ où } x \in [0\,;10]}$$

PARTIE A : Etude du bénéfice

On a tracé sur la feuille annexe, la courbe Γ de C et D_1 la droite d'équation $y = 400x$.

1) Au vu du graphique, la courbe Γ de C est toujours au-dessus de la droite D_1 donc pour tout x de $[0\,;10]$, $C(x) > 400x$ donc le coût est supérieur à la recette.

Donc l'entreprise Shishi ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix du marché est égal à 400€ par km. (0,5 point)

2) Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680€ le km.

a. La droite D_2 d'équation $y = 680x$ passe par l'origine et le point de coordonnées (0 ; 3400). Déterminer pour quelles quantité produites et vendues, l'entreprise Shishi réalise un bénéfice c'est résoudre graphiquement $C(x) > 680x$. (1 point)

L'entreprise Shishi réalise un bénéfice si elle fabrique et vend entre 2,1 km et 8,7 km de tissu.

b. Soit B la fonction définie sur $[0\,;10]$ par : $B(x) = 680x - C(x)$.

Pour tout x de$[0\,;10]$, $B(x) = 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$

Donc $\boldsymbol{B'(x) = -45x^2 + 240x + 180}$. (0,5 point)

c. Etude des variations de B sur $[0\,;10]$: (1,5 point)

B' est un polynôme de degré 2.

$\Delta = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90\,000 = 300^2$

Deux racines $x_1 = \frac{-240-300}{-2\times45} = 6$ et $x_2 = \frac{-240+300}{-2\times45} = -\frac{2}{3}$

B' est positive sur $[0\,;6]$ et négative sur $[6\,;10]$.

x	0		6		10
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	↗		1410		↘

L'entreprise Shishi réalise un bénéfice maximum avec un prix du marché de 680€ le km pour 6 km de tissu vendu. (0,5 point)

Le bénéfice est alors de 1410 €

PARTIE B : Etude du coût marginal

Le coût marginal C_m est assimilé à la fonction dérivée du coût total donc on pose, pour tout x de $[0\,;10]$, $C_m(x) = C'(x)$.

1) Etudier des variations de C_m sur $[0\,;10]$: (1 point)

$C_m(x) = C'(x) = 45x^2 - 240x + 500$

Donc $C_m'(x) = 90x - 240$ et $C_m'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{240}{90} = \frac{8}{3}$ on en déduit le tableau :

x	0		$8/3$		10
$C'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$C_m(x)$	$C_m(0)$		$C_m(8/3)$		$C_m(10)$

C_m admet un minimum en $\frac{8}{3}$.

NON DEMANDE

2) Etude de la convexité de C : (0,5 point)

$C_m = C'$ est décroissante sur $\left[0\,;\frac{8}{3}\right]$ donc C est concave sur $\left[0\,;\frac{8}{3}\right]$.

$C_m = C'$ est croissante sur $\left[\frac{8}{3}\,;10\right]$ donc C est convexe sur $\left[\frac{8}{3}\,;10\right]$.

Donc la courbe Γ admet un point d'inflexion en $\frac{8}{3}$ valeur en laquelle C_m admet un minimum.

PARTIE C : Etude du coût moyen

Le coût moyen CM mesure le coût par unité produite. Donc pour tout x de $[0\,;10]$, $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$.

1) Prouver que pour tout x de $[0\,;10]$,

$CM(x) = \frac{15x^3-120x^2+500x+750}{x} = 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$

Donc $CM'(x) = 30x - 120 - \frac{750}{x^2} = \frac{30x^3-120x^2-750}{x^2}$

Or $30(x-5)(x^2+x+5) = (30x-150)(x^2+x+5) = 30x^3 - 120x^2 - 750$

Donc $CM'(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$. (1 point)

	0		5		10
$CM'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$CM(x)$	||		425		875

Minimum

2) a. Pour quelle longueur x_0 de tissu produite le coût moyen est-il minimum ?

Pour tout x de $]0\,;10]$, $CM'(x)$ est du signe de $x-5$ ($x^2+x+5>0$ et $x^2>0$).

Donc CM' est négative sur $]0\,;5]$ et positive sur $[5\,;10]$ donc CM admet un minimum en 5.

Le coût moyen est donc minimum pour $x_0 = 5$ km de tissu vendu. (0,5 point)

Que valent dans ce cas le coût moyen, le coût total et le coût marginal ? (0,75 point)

$CM(5) = \frac{C(5)}{5} = 425$ $C(5) = 2125$ $C_m(5) = 425$

Donc le coût moyen est de 425€ par km de tissu, le coût total est de 2125€ et le coût marginal est de 425€.

b. Si le prix du marché est de 680€ le km, quel est le bénéfice réalisé par l'entreprise si elle fabrique et vend une longueur de tissu de x_0 km ? (0,25 point)

$B(5) = 1275$

Donc le bénéfice réalisé est de 1275€.