

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Dans la mesure où de nombreuses réponses sont fournies par l'énoncé, les explications et démarches utilisées prendront une part très importante dans la notation.

Exercice

Une entreprise fabrique entre 1000 et 7000 coques de téléphones portables, par jour. Le bénéfice en centaines d'euros, réalisé par la fabrication et la vente de x milliers de coques est modélisé par la fonction $B(x) = \frac{-x^3+6x^2-x}{2x+4}$ où $x \in [1 ; 7]$

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire (12 points)

Soit la fonction g définie sur $[1 ; 7]$ par $g(x) = -x^3 + 12x - 1$

- 1) Calculer la dérivée $g'(x)$, puis étudier son signe.
- 2) Dresser le tableau de variations complet de la fonction g sur $[1 ; 7]$
- 3) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique a sur $[1 ; 7]$ (On pourra décomposer l'intervalle $[1 ; 7]$ en deux intervalles)
- 4) Donner un encadrement au millième de a , à l'aide de la calculatrice.
- 5) Dresser le tableau de signe de la fonction g sur $[1 ; 7]$

Partie B : Recherche du bénéfice maximal (8 points)

- 1) Montrer que la dérivée de B est : $B'(x) = \frac{4(-x^3+12x-1)}{(2x+4)^2} = \frac{4g(x)}{(2x+4)^2}$
- 2) Etudier le signe de $B'(x)$ sur $[1 ; 7]$ en utilisant la question 5 de la partie A (signe de la fonction g)
- 3) Dresser le tableau de variations de la fonction B sur $[1 ; 7]$
- 4) En déduire le nombre de coques à fabriquer par jour pour réaliser un bénéfice maximal (arrondir à l'unité de coques)
- 5) Donner alors le montant du bénéfice maximal (arrondir à la centaine d'euros près)