Ch 13 : Puissances d'un nombre relatif et règles de calcul

1) Puissances d'un nombre relatif

Quel que soit le nombre relatif a et quel que soit l'entier positif n supérieur à 1 :

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0)$$

De plus, $a^1 = a$, $a^0 = 1\ (a \neq 0)$, $a^{-1} = \frac{1}{a}\ (a \neq 0)$ a^{-1} est l'inverse de a.

a^n se lit a exposant n.
a^2 se lit également a au carré.
a^3 se lit également a au cube.

Exemples : • $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ • $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

• $3{,}2^1 = 3{,}2$ • $7^0 = 1$ • $4^{-3} = \frac{1}{4^3}$

Application :
Calculer

$$5^3 =$$
$$2014^0 =$$
$$(-6)^2 =$$
$$-6^2 =$$
$$(-2)^5 =$$

2) Règles de priorités

• En l'absence de parenthèses, on calcule les puissances avant d'effectuer les autres opérations.

Exemple : $7 - 3^2 \times 4 = 7 - 9 \times 4 = 7 - 36 = -29$

Application :

Calculer $A = 18 - 4^2 \times 5$

Calculer $B = 48 \div 2^3 + 4^3 \div 8$

• En présence de parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses.

Exemple : $(3+5)^2 \times (3^2+5^2) = 8^2 \times (9+25) = 64 \times 34 = 2176$

Calculer A =

Calculer B =

3) Puissances et calcul

Quels que soient les nombres relatifs a et b et quels que soient les nombres entiers m et n :

$a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $a^m \times b^m = (ab)^m$

Exemples :

- $3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ car $3^2 \times 3^4 = (3\times 3)\times(3\times 3\times 3\times 3) = 3^6$
- $\dfrac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$ car $\dfrac{4^5}{4^3} = \dfrac{4\times 4\times 4\times 4\times 4}{4\times 4\times 4} = 4\times 4 = 4^2$
- $\dfrac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{-4}$ car $\dfrac{5^3}{5^7} = \dfrac{5\times 5\times 5}{5\times 5\times 5\times 5\times 5\times 5\times 5} = \dfrac{1}{5\times 5\times 5\times 5} = \dfrac{1}{5^4} = 5^{-4}$
- $3^7 \times 2^7 = 6^7$

Remarque : Ces règles ne s'appliquent pas pour des sommes ou des différences.

Application :

$A = \frac{3^4 \times 3^{-6}}{3^3 \times 3^{-7}}$

$B = \frac{(2^3)^4}{4^6}$

II- Cas particulier : les puissances de 10

1) Ecriture décimale des puissances de 10

n est un entier supérieur ou égal à 1 : $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs égaux à } 10} = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zéros}}$ $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zéros}}} = \underbrace{0{,}0\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$ (en n'oubliant pas la virgule après le premier 0)

10^n **se lit : dix « exposant » n**

Exemples : $10^3 = \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{3 \text{ facteurs}} = 1\underbrace{000}_{3 \text{ zéros}}$ et $1\ \underbrace{000\ 000}_{6 \text{ zéros}} = 10^6$

$10^{-5} = \underbrace{0{,}0000}_{5 \text{ zéros}}1$

Par convention, $10^0 = 1$

2) Produit par une puissance de 10

Exemples :

- $25{,}1 \times 10^5 = 2510000$ la virgule est décalée de 5 rangs vers la droite
- $25{,}1 \times 10^{-5} = 0{,}000251$ la virgule est décalée de 5 rangs vers la gauche

3) Opérations sur les puissances de 10

a) Multiplication et division des puissances de 10

Soient m et n deux entiers relatifs.

Règles de calcul	Exemples
$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$	$10^{-2} \times 10^5 = 10^{-2+5} = 10^3$
$\dfrac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$	$\dfrac{10^6}{10^5} = 10^{6-5} = 10^1 = 10$

b) Puissance d'une puissance de 10

Si m et n sont deux entiers relatifs alors $(10^m)^n = 10^{m \times n}$

Exemples : $\left(10^8\right)^7 = 10^{8\times7} = 10^{56}$ et $\left(10^3\right)^{-5} = 10^{3\times(-5)} = 10^{-15}$

4) Notation scientifique

Propriété : Un nombre décimal admet plusieurs écritures de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle a désigne un nombre décimal et n un entier relatif.

Exemples : $2540000 = 254 \times 10^4 = 25{,}4 \times 10^5 = 2{,}54 \times 10^6 = 0{,}254 \times 10^7$

$0{,}00138 = 138 \times 10^{-5} = 13{,}8 \times 10^{-4} = 1{,}38 \times 10^{-3} = 0{,}138 \times 10^{-2}$

Définition : La notation scientifique d'un nombre décimal est l'unique forme $a \times 10^n$ dans laquelle le nombre a possède un seul chiffre non nul avant la virgule.

Remarque : la notation scientifique permet d'obtenir un ordre de grandeur ou des encadrements d'un nombre.

Exemple :
Soit $A = 123456789 \times 987654321$.
On a calculé A et on a obtenu l'écran suivant : $1{,}219436049 \times 10^{19}$
• $1{,}2 \approx 1$ donc 1×10^{19} est un ordre de grandeur de A.
• Les encadrements suivants indiquent aussi un ordre de grandeur de A :
$1 \times 10^{19} < A < 2 \times 10^{19}$ et $10^{19} < A < 10^{20}$

Application : Puissances de 10

Donner l'écriture scientifique de :

$A = 3{,}4 \times 10^5 \times 0{,}02 \times 10^{12}$

$B = \dfrac{18 \times 10^{12}}{4 \times 10^7}$