I Quotients égaux et produit en croix

1) Quotients égaux

On ne change pas un nombre en écriture fractionnaire en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul

$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$ avec a, b et k des nombres relatifs et b et k sont différents de zéro.

Exemples : $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5}$ et $\frac{15}{10} = \frac{15 : 5}{10 : 5}$

Signe d'un quotient :

Si a est un nombre relatif et si b est un nombre relatif non nul alors : $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

2) Produit en croix

a, b, c, d désignent des nombres relatifs avec $b \neq 0, d \neq 0$.

• Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$ • Si $a \times d = b \times c$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemples d'utilisation :

→ Vérifier l'égalité de deux écritures fractionnaires

• $\frac{-3}{14,1}$ et $\frac{4,5}{-21,15}$ sont-elles égales ?
 $-3 \times (-21,15) = 63,45$ et $14,1 \times 4,5 = 63,45$.

Donc $\frac{-3}{14,1} = \frac{4,5}{-21,15}$.

• $\frac{8}{-10,5}$ et $\frac{9,5}{-12,5}$ sont-elles égales ?
 $8 \times (-12,5) = -100$ et $-10,5 \times 9,5 = -99,75$.

Comme $-100 \neq -99,75$, on a $\frac{8}{-10,5} \neq \frac{9,5}{-12,5}$.

→ Trouver un nombre inconnu

On cherche le nombre y tel que $\frac{5}{8} = \frac{12,5}{y}$.

En utilisant le produit en croix, on obtient :

$$5 \times y = 8 \times 12,5$$

$$5 \times y = 100$$

$$y = 20$$

II Additions et soustractions de nombres relatifs en écriture fractionnaire

1) Les dénominateurs sont les mêmes

Pour additionner ou soustraire des nombres relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur, on additionne ou on soustrait les numérateurs et on garde le même dénominateur.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \quad \text{où } a, b, c \text{ sont des nombres relatifs, avec } c \neq 0$$

Exemples :

$$\frac{-7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-7+1}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$\frac{-6}{5} - \frac{-3}{5} = \frac{-6 - (-3)}{5} = \frac{-6+3}{5} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

2) Les dénominateurs sont différents

Pour additionner ou soustraire des nombres relatifs en écriture fractionnaire de dénominateurs différents, on commence par les réduire au même dénominateur. Ensuite, on applique la règle vue au 1).

Exemple : Calculer sous forme fractionnaire $A = \frac{5}{6} - \frac{1}{8} + \frac{7}{4}$

La méthode consiste à écrire les multiples du plus grand dénominateur jusqu'à obtenir un multiple de **tous** les autres dénominateurs.

Multiples de 8 :

8	← multiple de 4 mais pas de 6
16	← multiple de 4 mais pas de 6
24	← multiple de 4 et de 6 et donc de tous les dénominateurs.

On prend donc 24 comme dénominateur commun aux trois termes :

$$A = \frac{5}{6} - \frac{1}{8} + \frac{7}{4}$$

III Multiplication de nombres en écriture fractionnaire

Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad \text{et} \quad a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d} \quad \text{où } a, b, c, d \text{ sont des nombres relatifs avec } c \text{ et } d \text{ non nuls.}$$

Remarque : Il est conseillé, si cela est possible, de simplifier avant de multiplier.

Exemple :

$$\frac{2}{15} \times \frac{-21}{14} = -\frac{2 \times 21}{15 \times 14} = -\frac{2 \times 3 \times 7}{3 \times 5 \times 2 \times 7} = -\frac{1}{5}$$

Calculer :

$$A = \frac{15}{28} \times \frac{7}{18} \times \frac{12}{6} =$$

IV Division de nombres relatifs en écriture fractionnaire

1) Inverse d'un nombre relatif en écriture fractionnaire

Définition : Deux nombres sont inverses si leur produit est égal à 1

Propriétés : c et d désignent des nombres relatifs non nuls.

- L'inverse du nombre c est le nombre $\frac{1}{c}$.
- L'inverse du nombre $\frac{c}{d}$ est le nombre $\frac{d}{c}$.

Exemples :

- L'inverse de -3 est $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.
- L'inverse de $-\frac{3}{4}$ est $-\frac{4}{3}$.

2) Division

Diviser par un nombre relatif en écriture fractionnaire revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.

a, b, c, d désignent des nombres relatifs avec b, c et d différents de zéro.

- $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$
- $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ ou $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exemple :

$$\frac{\frac{11}{6}}{-\frac{33}{4}} = \frac{11}{6} \times \left(-\frac{4}{33}\right) = -\frac{11 \times 4}{6 \times 33} = -\frac{11 \times 2 \times 2}{2 \times 3 \times 3 \times 11} = -\frac{2}{9}$$

$$\text{Calculer } A = \frac{-3}{5} \div \frac{27}{125}$$