Ch 15 Fonctions homographiques

1°/ Fonctions homographiques

1.1 Définition :

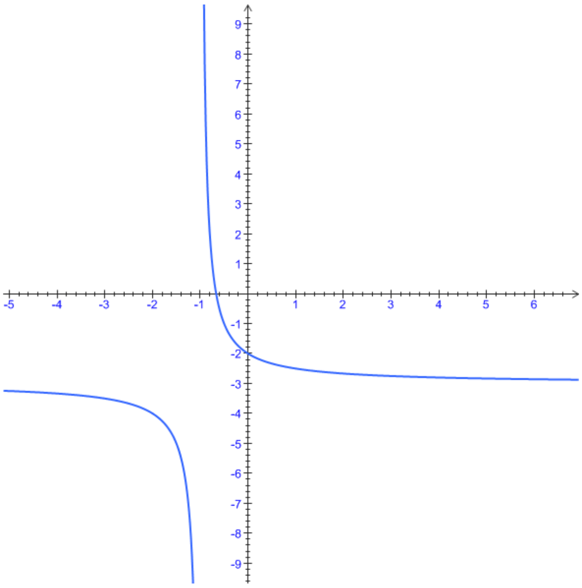
Dire qu'une fonction f est une fonction homographique signifie qu'il existe des réels a, b, c ($c \neq 0$) et d tels que pour tout nombre x n'annulant pas le dénominateur , $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Application : soit la fonction f telle que $f(x) = -3 + \frac{1}{x+1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f
b) Démontrer que la fonction f est une fonction homographique

1.2 Représentation graphique :

Les fonctions homographiques sont représentées par des **hyperboles** admettant une symétrie par rapport à la droite verticale d'équation $x = -\frac{d}{c}$



Application :

1) Tracer à la calculatrice l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{2x-1}{x+1}$

Tableau de valeurs :

x	-6	-4	-3	-2	$-1{,}5$	0	1	2	3	4	9
$f(x)$	2,6	3	3,5	5	8	-1	0,5	1	1,25	1,4	1,7

f est définie si et seulement si $x + 1 \neq 0$ ou si $x \neq -1$.

Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ou $]-\infty; -1[\, \cup\,]-1; +\infty[$

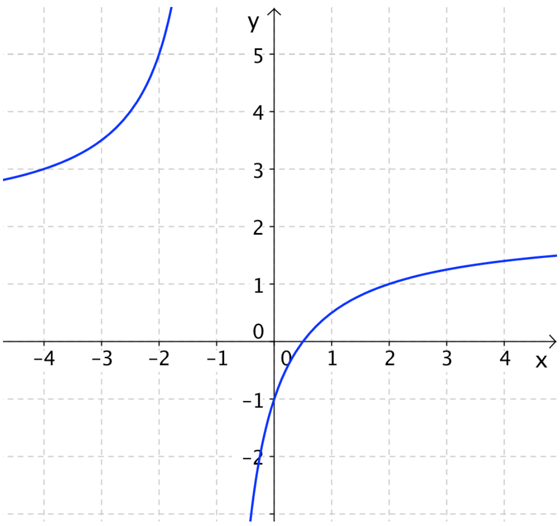


Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

2) Déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$

<u>Tableau de signes :</u>

	x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$	
$a = 2$; $a > 0$	$2x - 1$	$-$		$-$	0	$+$		$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
$a = 1$; $a > 0$	$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$		$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
	$\frac{2x-1}{x+1}$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$		

CCL : $\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

3) $\boldsymbol{g(x) = \frac{x-1}{x+2}}$

Montrer que $g(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ et en déduire le sens de variation de g.

$$1 - \frac{3}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = \frac{x-1}{x+2} = g(x)$$

Ainsi $g(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

Sur $]-\infty; -2[$, si $x_1 < x_2 < -2$, alors $x_1 + 2 < x_2 + 2 < 0$

$\frac{1}{x_1+2} > \frac{1}{x_2+2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$.

$-\frac{3}{x_1+2} < -\frac{3}{x_2+2}$

$1 - \frac{3}{x_1+2} < 1 - \frac{3}{x_2+2}$

C'est-à-dire que $g(x_1) < g(x_2)$

On en conclut que la fonction g est croissante sur $]-\infty; -2[$.

On démontre de même que la fonction g est croissante sur $]-2; +\infty[$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

4) Montrons que la représentation graphique d'une fonction homographique *h* est symétrique par rapport au point O' de coordonnées $\left(-\frac{d}{c}\,;\frac{a}{c}\right)$.

Soit un point $M(x\,;y)$ de $\mathcal{C}_h$. Alors $y = h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Calculons les coordonnées de $M'(x', y')$, symétrique de M par rapport à O.

(deux calculs possibles, par les vecteurs ou la formule du milieu)

M' symétrique de M par rapport à O' $\Leftrightarrow$ O' milieu de $[MM']$.

On a $\begin{cases} x_{O'} = -\frac{d}{c} = \frac{x'+x}{2} \\ y_{O'} = \frac{a}{c} = \frac{y'+y}{2} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x' = -\frac{2d}{c} - x \\ y' = \frac{2a}{c} - y \end{cases}$

Vérifions maintenant que M' appartient à $\mathcal{C}_h$ (on vérifie que $h(x') = y'$) :

$$h(x') = \frac{ax'+b}{cx'+d} = \frac{a\left(\frac{-2d}{c} - x\right) + b}{c\left(\frac{-2d}{c} - x\right) + d} = \frac{-ax - \frac{2ad}{c} + b}{-cx - 2d + d} = \frac{ax + \frac{2ad}{c} - b}{cx + d}$$
$$= \frac{acx + 2ad - bc}{c(cx+d)}$$

Par ailleurs, $y' = \frac{2a}{c} - y = \frac{2a}{c} - \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{2a(cx+d) - c(ax+b)}{c(cx+d)} = \frac{2acx + 2ad - cax - cb}{c(cx+d)} = \frac{acx + 2ad - bc}{c(cx+d)}$

Ainsi, $h(x') = y'$, donc le symétrique de tout point de $\mathcal{C}_h$ par la symétrie centrale de centre O' appartient aussi à $\mathcal{C}_h$. On en conclut que $\mathcal{C}_h$ est symétrique par rapport à O'.