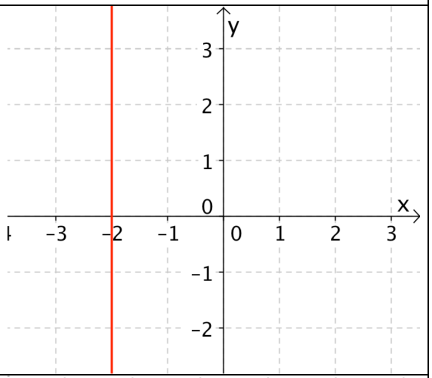
1°/ Equations de droites

1.1 Caractérisation analytique d'une droite

Propriété : Soit (O, I, J) un repère du plan et une droite d dans ce repère.

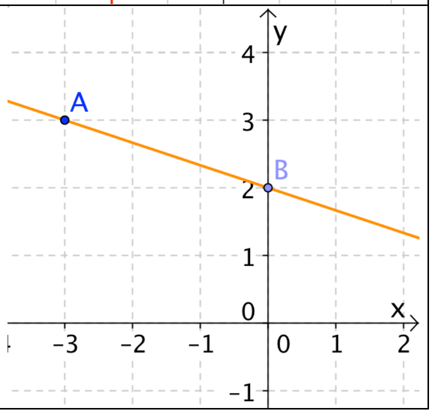
Si d est parallèle à l'axe des ordonnées alors d a une équation de la forme $\boldsymbol{x = c}$ où c est un nombre réel.



Si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors d a une équation de la forme $\boldsymbol{y = ax + b}$ où a et b sont deux nombres réels, $a \neq 0$.

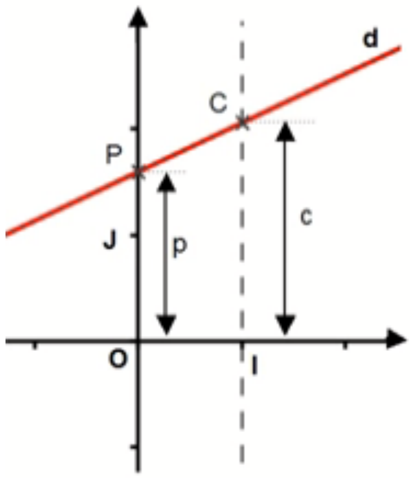
a : coefficient directeur de la droite d.

b : ordonnée à l'origine de la droite d.



Démonstration : Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit d une droite non parallèle à (Oy).
d coupe (Oy) en $P(0\,;b)$.
Elle coupe aussi la parallèle passant par I en $C(1\,;c)$.
Posons alors $a = c - b$.

Considérons la fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$.
On a donc $f(0) = b$ et $f(1) = a\times1 + b = a + b = (c - b) + b = c$
Ainsi, C et P sont deux points de la représentation graphique de f. La représentation graphique d'une fonction affine étant une droite, (CP) est la représentation graphique de f et chaque point $M(x\,;y)$ de d vérifie donc l'équation $y=ax+b$.



Propriété : Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points distincts d'une droite d tels que $x_A \neq x_B$, alors la droite d a pour coefficient directeur :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

(propriété de proportionnalité des accroissements vue en 3ème).

Démonstration : $x_A \neq x_B$, donc la droite d n'est pas parallèle à (Oy).
Ainsi, d a pour équation $y = ax + b$
$A \in d \Leftrightarrow y_A = ax_A + b$ et $B \in d \Leftrightarrow y_B = ax_B + b$
En soustrayant, il vient $y_B - y_A = ax_B + b - (ax_A + b) = a(x_B - x_A)$
D'où, puisque $x_B - x_A \neq 0$, $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Propriété (admise) : Soit (O, I,J) un repère du plan et a, b et c trois nombres réels, a non nul. L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient une équation de la forme $y = ax + b$ ou $x = c$ est une droite.

1.2 Vecteur directeur d'une droite

Définition : Soit d une droite du plan. On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur non nul $\vec{u}$ de même direction que celle de la droite d.

Propriété : Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan et d une droite dans ce repère.	
Si d //(Oy), alors $\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de d.	Si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors $y = ax + b$ est une équation de la droite d et le vecteur $\vec{u}\binom{1}{a}$ est un vecteur directeur de d.

Démonstration : Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points de d tels que $x_B - x_A = 1$.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A = 1}{y_B - y_A = ax_B + b - (ax_A + b) = a(x_B - x_A) = a}$, c'est-à-dire le vecteur $\vec{u}\binom{1}{a}$. cqfd

Application : Déterminer l'équation de la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\binom{3}{9}$ passant par le point $F(0; 5)$.

$\vec{u}$ n'est pas colinéaire à $\vec{\jmath}$ donc d a pour équation $y = ax + b$.
Le vecteur $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}$, colinéaire à $\vec{u}$, est aussi un vecteur directeur de d et $\vec{v}\binom{1}{3}$. Le coefficient directeur de d est donc $a = 3$.
De plus $F \in d$, donc ses coordonnées vérifient $y = 3x + b$. On résout $5 = 3\times 0 + b$. D'où b=5.
Ainsi, l'équation de la droite d est $\underline{y = 3x + 5}$.

2°/ Position relative de deux droites

2.1 Droites parallèles

Propriété : Soit (O,I, J) un repère du plan. Soit d et d' deux droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. d // d' $\Leftrightarrow a = a'$.
Deux droites parallèles ont même coefficient directeur.

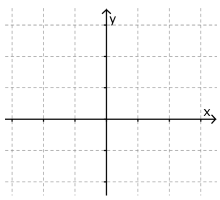
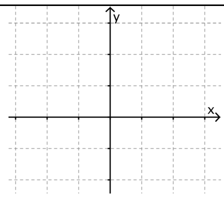
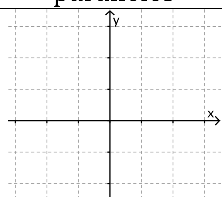
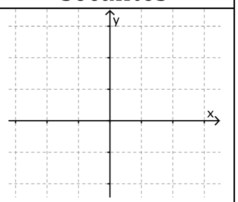
Démonstration :

- $a = a' \Longrightarrow$ d // d' : D'après la propriété du A.2., d et d' ont même vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{a}$, donc d // d' (voir IV du chapitre sur les vecteurs)
- d // d' $\Longrightarrow$ $a = a'$: démonstration par contraposée : on suppose que $a \neq a'$ et on montre alors que d et d' sont sécantes donc non parallèles (cf. livre page 258).

Application 1: déterminer l'équation d'une droite parallèle à une autre

Déterminer l'équation de la droite d' parallèle à la droite d : $\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{x} - 5$ passant par le point A(- 1 ; 2).

2.2 Droites parallèles, droites sécantes

Equation de d	$x = c$	$y = ax + b$	$y = ax + b$	
Equation de d'	$x = c'$	$x = c'$	$y = a'x + b'$	
Position relative de d et d'	d et d' sont parallèles	d et d' sont sécantes	$a = a'$ d et d' sont parallèles	$a \neq a'$ d et d' sont sécantes
Représentation				

2.3 Points alignés

Propriété : Soient A, B, C trois points d'abscisses différentes.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur (ou encore ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires).

Application 2 :

Dans un repère, on donne les points A(1 ; - 1) ; B(3 ; 5) ; C(2 ; 7) ; D(- 1 ; -2) ; E(2 ; - 1) ; F(-1 ; 5).

Etudier la position relative des droites :

« **étudier la position relative** » de deux droites signifie qu'il faut déterminer si elles sont sécantes ou parallèles

a) (AB) et (CD)

b) (AB) et (EF)

Application 3 :

Dans un repère, on donne A(3 ; 1) ; B(- 1 ; $-\frac{7}{3}$) et C(- 4,5 ; 1,5).

Prouver que A, B et C sont alignés.

3°/ Droites et systèmes d'équations linéaires

3.1 Système linéaire

Définition : Soit (S) le système d'équations dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ d'inconnues x et y.

Résoudre le système (S) consiste à trouver tous les couples de réels (x, y) vérifiant simultanément les deux équations du système.

3.2 Systèmes et droites sécantes

Si $b \neq 0$ et $b' \neq 0$, le système (S) $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} by=-ax+c \\ b'y=-a'x+c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b} \\ y=-\frac{a'}{b'}x+\frac{c'}{b'} \end{cases}$

Résoudre (S) revient à trouver l'intersection des droites associées à ces deux équations.

Les deux droites possèdent un unique point d'intersection si leurs coefficients directeurs sont différents, soit si :

$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'}$, ou encore si $\boldsymbol{ab' - a'b \neq 0}$

Rappel : on résout un tel système par substitution si x ou y apparaît sans coefficient.
Sinon, on utilise la méthode par combinaison.

Exemple : Résoudre le système (S) $\begin{cases} -2x+6y=3 & L1 \\ \frac{3}{2}x-2y=-4 & L2 \end{cases}$

$a=-2 \quad b=6$
$a'=\frac{3}{2} \quad b'=-2$ Ainsi, $ab'-a'b=4-9=-5$. Or $-5 \neq 0$. Le système admet donc une unique solution.

- On cherche x par combinaison :

(S) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -2x+6y=3 & L1 \\ \frac{9}{2}x-6y=-12 & 3\times L2 \end{cases}$

$-2x+\frac{9}{2}x=3-12 \qquad \Leftrightarrow x\left(-2+\frac{9}{2}\right)=-9 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x=-9 \Leftrightarrow x=-\frac{18}{5}$

- On remplace x dans L1 pour trouver y : $-2\times\left(-\frac{18}{5}\right)+6y=3 \Leftrightarrow \frac{36}{5}+6y=3 \Leftrightarrow$

$$6y=3-\frac{36}{5} \Leftrightarrow 6y=\frac{15-36}{5}=-\frac{21}{5} \Leftrightarrow y=-\frac{7}{10}$$

La solution du système est le couple $\left(-\frac{18}{5}; -\frac{7}{10}\right)$, ou encore $\mathcal{S}=\left\{\left(-\frac{18}{5}; -\frac{7}{10}\right)\right\}$

3.3 Systèmes et droites parallèles (deux cas où $ab' - a'b = 0$)

Système n'admettant pas de solution

Soit (S) le système d'équations :

$$\begin{cases} -2x + y = 0 & L1 \\ 4x - 2y = 4 & L2 \end{cases}$$

Résolution du système

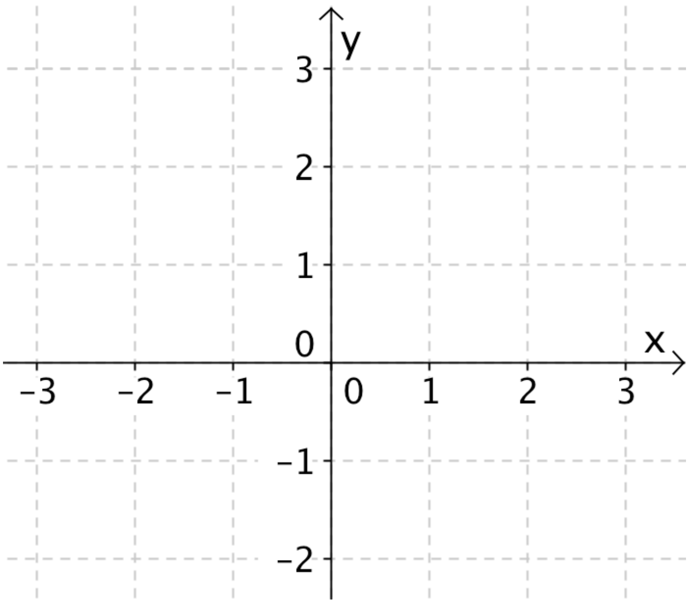
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 & -2\times L1 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$$

Or $0 \neq 4$, donc (S) n'admet aucune solution.

Interprétation géométrique

$(L1) \Leftrightarrow y = 2x$ (d1)
$(L2) \Leftrightarrow y = 2x - 2$ (d2)

Les deux droites (d1) et (d2) sont parallèles non confondues car elles ont même coefficient directeur : $a = 2$, mais différentes ordonnées à l'origine (0 et -2).



Système admettant une infinité de solutions

Soit (S) le système d'équations :

$$\begin{cases} -2x + y = -1 & L1 \\ 4x - 2y = 2 & L2 \end{cases}$$

Résolution du système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 & -2\times L1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

$-2L1 = L2$, donc (S) admet une infinité de solutions : tous les couples $(x\,;2x - 1)$.

Interprétation géométrique

$L1 = L2 \Leftrightarrow y = 2x - 1 \quad (d1) = (d2)$

Les deux droites (d1) et (d2) sont confondues. Tous les points de la droite sont solution du système (S).